BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a VIII-a

1. Fie expresia $E=\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+c)(b+d)}+\sqrt{(c+d)(c+a)}+\sqrt{(d+a)(d+b)}$, unde $a,b,c,d>0$. Să se demonstreze că:

a) $E\le 2(a+b+c+d)$.

b) $E\ge 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{da}\right)$.

Soluţie şi barem:

OFICIU	**1p**
a) Folosind inegalitatea mediilor, avem $\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{a+b+a+c}{2}=a+\frac{b+c}{2}$ și analoagele: $\sqrt{(b+c)(b+d)}\le b+\frac{c+d}{2}$, $\sqrt{(c+d)(c+a)}\le c+\frac{d+a}{2}$ și respectiv $\sqrt{(d+a)(d+b)}\le d+\frac{a+b}{2}$. Prin însumarea celor patru inegalități se obține concluzia.	**2p**
b) Avem $(a+b)(a+c)=a^2+a(b+c)+bc\ge a^2+2a\sqrt{bc}+bc=\left(a+\sqrt{bc}\right)^2$, (am folosit inegalitatea mediilor: $b+c\ge 2\sqrt{bc}$) și analoagele: $(b+c)(b+d)\ge\left(b+\sqrt{cd}\right)^2$, $(c+d)(c+a)\ge\left(c+\sqrt{da}\right)^2$ și respectiv $(d+a)(d+b)\ge\left(d+\sqrt{ab}\right)^2$. Prin însumarea celor patru inegalități rezultă $E\ge a+b+c+d+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{da}$.	**4p**
Pentru a demostra inegalitatea din enunț este suficient să arătăm că $a+b+c+d\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{da}\Leftrightarrow 2a+2b+2c+2d-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{cd}-\sqrt{da}\ge 0\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)^2+\left(\sqrt{d}-\sqrt{a}\right)^2\ge 0$ Ultima inegaltate este evident adevărată.	**3p**

2. Se consideră numărul $N=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$, unde *a* şi *b* sunt numere raţionale pozitive.

Arătaţi că $N\in\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $a=b$.

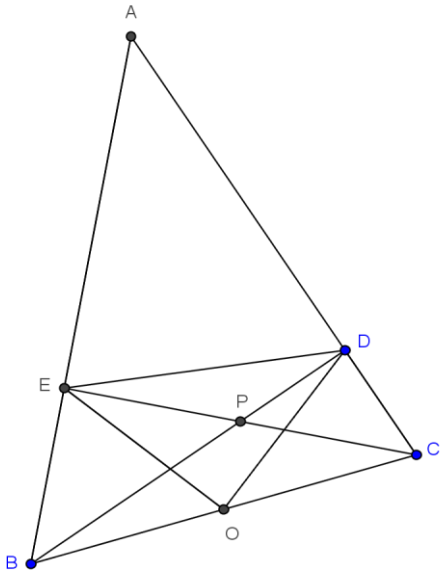
Soluţie şi barem:

OFICIU	**1p**
Dacă $a=b$, atunci $N=3\in\mathbb{N}$.	**1p**
Presupunem că $N\in\mathbb{N}$. Avem $N=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=1+\frac{2ab}{a^2-ab+b^2}\le 1+\frac{2ab}{ab}=3$. Deducem că $N\in\{1,2,3\}$.	**3p**
Dacă $N=1$, obţinem $ab=0$, contradicţie.	**2p**

Pentru $N=2$, obţinem $a^2-3ab+b^2=0$, echivalent cu $\left(a-\frac{3b}{2}\right)^2-\frac{5b^2}{4}=0$. Descompunând diferenţa de pătrate avem $a=b\cdot\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Prin urmare a şi b nu pot fi simultan raţionale.	**2p**
Pentru $N=3$, obţinem relaţia echivalentă $(a-b)^2=0$, deci $a=b$.	**1p**

3. În triunghiul ascuțitunghic ABC se consideră înălțimile $[BD]$ și $[CE]$, unde $D\in[AC]$ și $E\in[AB]$. Dacă $EC=2EB$ și $BD=3DC$, atunci determinați măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

Soluţie şi barem:



OFICIU	**1p**
Fie $BD\cap CE=\{P\}$. Notăm $EB=a$, $DC=b$. Avem $EC=2a$ și $BD=3b$. În triunghiul BEC ($m(\sphericalangle E)=90^\circ$), din Teorema lui Pitagora, obținem $BC=a\sqrt{5}$. Analog în triunghiul dreptunghic BDC rezultă $BC=b\sqrt{10}$. Din aceste relații deducem că $a=b\sqrt{2}$ și deci $EB=b\sqrt{2}$ și $EC=2b\sqrt{2}$. Patrulaterul $BEDC$ este inscriptibil și conform Teoremei lui Ptolemeu rezultă $BD\cdot EC=BE\cdot DC+DE\cdot BC\Rightarrow 3b\cdot 2b\sqrt{2}=b\sqrt{10}\cdot ED+b\cdot b\sqrt{2}\Rightarrow ED=b\sqrt{5}$.	**2p**
Fie O mijlocul segmentului $[BC]$. În triunghiul dreptunghic BEC, $[EO]$ este mediană, deci $EO=\frac{BC}{2}=\frac{b\sqrt{10}}{2}$. Similar, în triunghiul dreptunghic BDC, $[DO]$ este mediană, deci $DO=\frac{BC}{2}=\frac{b\sqrt{10}}{2}$. În trunghiul EOD avem $EO^2+DO^2=ED^2\Leftrightarrow\left(\frac{b\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{10}}{2}\right)^2=\left(b\sqrt{5}\right)^2$, adevărat, deci, conform reciprocei Teoremei lui Pitagora, rezultă $m(\sphericalangle EOD)=90^\circ$.	**3p**

Triunghiul BOD este isoscel $(DO = BO)$, deci $m(\sphericalangle DOC) = 2 \cdot m(\sphericalangle DBC) = 2 \cdot m(\sphericalangle PBC)$. Și triunghiul EOC este isoscel $(EO = CO)$, deci $m(\sphericalangle EOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle ECB) = 2 \cdot m(\sphericalangle PCB)$. Cum $m(\sphericalangle EOD) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle DOC) = 90^\circ$ și deci $m(\sphericalangle PCB) + m(\sphericalangle PBC) = 45^\circ$.	**2p**
$\sphericalangle EPB$ este exterior triunghiului BPC și rezultă $m(\sphericalangle EPB) = m(\sphericalangle PCB) + m(\sphericalangle PBC) = 45^\circ$. Deoarece $m(\sphericalangle AED) + m(\sphericalangle ADP) = 180^\circ$ obținem că patrulaterul $AEPD$ este inscriptibil. Așadar $m(\sphericalangle EAD) = m(\sphericalangle EPB) = 45^\circ$, de unde concluzionăm că $m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$.	**2p**